TEORI KATEGORI SEBAGAI ASAS MATEMATIK MODEN?

Muhammad Taufik bin Mohd Yusof

Pusat Pengajian Sains Matematik,

Universiti Kebangsaan Malaysia

Abstrak

Makalah ini bertujuan untuk mengimbas kembali secara ringkas kegagalan ideologi-ideologi terdahulu dalam usaha untuk menyediakan landasan yang kukuh bagi matematik moden, diikuti dengan kedudukan matematik semasa serta kenyataan tabiinya yang seringkali dikaitkan teori set dan kelemahannya lalu menperkenalkan keupayaan teori kategori dalam mendukung falsafah matematik moden.

1 PENGENALAN

Tiada lapangan ilmu yang mana asasnya tidak bermasalah lebih-lebih lagi bila disoroti epistemologinya. Begitu juga dengan ilmu matematik, apatah lagi bila kita membicarakan ilmu matematik semasa yang dicorakkan oleh ahli-ahli matematik Eropah yang menjadi piawaian kegiatan penyelidikan matematik kini. Pencarian atau usaha pembinaan asas sesuatu lapangan ilmu bukanlah sesuatu yang sepertimana difahami oleh orang kebanyakkan sebagai perkara sia-sia atau tidak berguna. Sepertimana kepercayaan Islam yang asasnya mendukung kemandirannya serta menjadi sebab dalam perjuangannya, begitu juga dengan matematik yang memerlukan asasnya dijelaskan. Sebagaimana pencarian prinsip asas kehidupan seorang insan membolehkan beliau menyingkap kembali makna kewujudannya secara menyeluruh, penemuan kepada asas matematik memberi makna tersendiri kepada ahli matematik atau matematikawan (meminjam istilah saudara Ikhwan) akan aktiviti atau usaha yang mereka lakukan selama ini.

Namun dalam pencarian asas kepada ilmu matematik, apa yang dicari dan apa yang ditemui kebiasaan akan ditapis oleh falsafah atau nilai pengamalnya seperti mana dengan sesetengah pendapat yang mengatakan punca kegiatan matematik adalah peniskalaan aktiviti manusia (Mac Lane 1986) yang bergantung rapat dengan budaya sesuatu kaum lalu mendukung tesis Shaharir (1999) akan simbiosis diantara matematik dan nilai. Makalah ini cuba beralih sementara daripada tema makalah penulis sebelum ini (Taufik 2012) kaitan antara matematik dan kebenaran dan cuba melihat melalui nilai atau kaca lensa alternatif mengenai tabii sebenar matematik dalam membina atau mencari asas matematik.

2 TABII MATEMATIK

Logikisma, formalisma dan intuisinisma merupakan tiga aliran falsafah yang terkemuka abad ke-19 dalam menentukan asas matematik yang saling bersaing. Persaingan yang ketat bukan sahaja dalam menentukan asas matematik secara epistemologi tetapi juga dalam menentukan bagaimana seharusnya kegiatan penyelidikan matemaik seharusnya dijalankan atau bagaimana untuk ‘bermatematik’. Dirujukan pembaca kepada Sibley (2009) untuk pengenalan ringkas ketiga-tiga aliran falsafah ini manakala Ikhwan (2012) ada membincangkan formalisma dalam matematik dengan lebih terperinci.

Intuisinisma mati akibat pengunduran penjuangnya (yakni Brouwer) dalam persaingan tersebut manakala Teorem Ketidaklengkapan Godel mematikan usaha dua aliran falsafah yang lain apabila menerangkan bagaimana kekonsistenan dan kelengkapan suatu model aksiom matematik tidak boleh berlaku secara serentak meskipun pada hakikatnya kegiatan matematik semasa diacu menurut fahaman formalisma tajaan Hilbert.

Kegagalan ketiga-tiga aliran falsafah berkenaan kerana usaha mereka untuk menerangkan apakah bendanya matematik, dalam erti kata lain tabii matematik dari segi ontologi. Bagi Mac Lane, usaha berkenaan sia-sia kerana matematik bukanlah mengenai apakah ia secara khususnya tetapi mengenai bentuk paling niskalanya (Mac Lane 1992). Sifat matematik yang beraneka ragam (*protean*) yang pada pendapat beliau terletaknya intipati matematik secara umum dan matematik moden secara khususnya.

Maka falsafah yang dibawa oleh Mac Lane dalam memperihalkan matrmatik lebih kepada fungsian, atau prgamatiknya. Kekuatan matematik terletak kepada kepelbagaian struktur-struktur yang niskala dan hubungan diantara struktur-struktur tersebut.

3 TEORI SET

Kedudukan semasa teori set dalam matematik sering tidak jelas dan kabur. Kebanyakkan teks matematik yang piawai membahaskannya sebagai sebahagian dari cabang matematik yang mengkaji konsep set secara umum. Namun kebanyakkan struktur dalam matematik adalah bersandarkan kepada atau boleh dirumuskan dalam tanggapan sebuah set. Suatu fungsi f(x) contohnya dengan katakan domain A dan kodomain B kini dalam teori set diungkapan sebagai subset hasil set A dengan set B yang memenuhi syarat-syarat tertentu.

Teori set sepertimana dirumuskan oleh Cantor terlampau umum dan mencetuskan beberapa paradoks terkenal seperti paraadoks Russell. Dalam mengatasi masalah tersebut, teori set beraksiom diperkenalkan sepertimana teori ZFC. Namun pengenalan teori set beraksiom cuma menampakkan lagi kaitan diantara teori set dan mantik dan kekonsistenan teori sedemikian terjejas dengan teorem Ketidaklengkapan Godel.

` Teori set dalam hubungannya dengan kepelbagaian struktur matematik lebih menekankan cirian dalam sesuatu struktur. Namun kelonggaran set dalam bentuk paling umum yang membolehkan konsep ketakterhingaan diserap masuk menimbulkan keraguan akan kesahihan pembuktian yang terlibat menimbulkan banyak lohong-lohong metafizik.

4 TEORI KATEGORI

Maka jika kita ingin mngkaji suatu teori baru dalam memperihalkan tabii matematik bersandarkan keaneka ragamnya dan diangkat sebagai asas matematik moden atau ringkanya sebagai alat pengurusan maka teori tersebut mestilah sekurangnya memenuhi tiga syarat. Pertama teori berkenaan serta aksiom-aksiom dalam teori tersebut mestilah boleh untuk tidak diungkapkan dalam pandangan teori set. Kedua, teori berkenaan mampu dalam mengkaji sesuatu struktur bukan sahaja penerangan terhadap ciri dalaman tetapi ciri luarannya sekali dengan pengkajian dua kelas struktur yang sama di bawah penjelmaan tertentu. Ketiga teori berkenaan haruslah mampu memperihalkan kesemua struktur matematik yang dibina menggunakan set dan keseteraan dalam kedua-dua pendekatan. Disini teori kategori nampaknya merupakan teori alternatif yang dicari.

Suatu *metakategori* (bebas dari set) terdiri daripada *objek-objek* A, B, C . . . dan *anak-anak panah* f,g,h… yang mana setiap anak panah mempunyai suatu objek A sebagai *domainnya* dan suatu set B senagai *kodomainnya* dan untuk setiap objek A terdapat anak panah yang digelar anak panah pengecaman 1_A . Apabila suatu objek B merupakan domain anak panah f dan juga kodomain anak anah g maka suatu ubahan baru dua anak panah berkenaan g.f diperolehi. Selain itu dibawah operasi dedua ubahan tersebut, ia mestilah memenuhi hukum sekutuan dan hukum pengecaman (Mac Lane 1971). Apabila metakategori diungkap dalam sudut teori set, maka ia dipanggil satu *kategori.* Sifat kedua dipenuhi dengan memperkenalkan senarai tujuh aksiom untuk fungsi (Mac Lane 1986). Aksiom berkenaan membolehkan sebarang struktur yang diungkapkan dalam bahasa berkenaan dikaji secara dalaman atau luaran dengan hubungan objek-objek dalam kategori berkenaan. Sifat ketiga lebih bersifat tempatan dalam lapangan masalah matematik tetapi contoh terbaik ialah kesetaraan aksiom Peano dan aksiom Kewujudan Objek Nombor Tabii dalam member gambaran set nombor tabii (Yuri 1996).

5 PENUTUP

Namun begitu, dalam meletakkan teori kategor sebagai asasnya yang cendurung kepada fungsinya yang utilitarian, beberapa persoalan penting turut timbul.. Kajian lebih lanjut dalam teori kategori berkenaan kategori topos yang dikatakan bersandarkan mantik Heyting mencetuskan kemungkinan mengangkat ia sebagai asas epistemologi matematik moden (Lawevere 1972). Selain itu terdapat beberapa cabang matematik tulin yang mana teori kategori masih lagi gagal menunjukkan kebergunaanya atau kaitannya dengan. Contohnya adalah analisis. Kebanyakkan struktur matematik *peringat kedua* masih lagi tidak mampu dikaitkan secara terus dengan teori kategori.

RUJUKAN

Lawevere, F.W. Theory of Categories over a Base Topos. *Perugia Notes*.

Mac Lane, S. 1971. *Categories for the Working Mathematician.* New York: Springer-Verlag.

Mac Lane, S. 1986. *Mathematics: Form and Function*. New York: Springer-Verlag.

Mac Lane, S. 1992. The Protean Character of Mathematics. Dlm. *The Space of Mathematics.* Berlin: Walter de Gruyter

Muhammad Ikwan Azlan. 2012. Matematik Formal Sepintas Lalu.

Muhammad Taufik bin Mohd Yusof. 2012. Matematik sebagai Pencarian Kebenaran.

Sibley, Thomas Q. 2009. *The Foundations of Mathematics.* New Jersey: John Wiley & Sons .